# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

**Curso 2007–08**

## BLOQUE 1

1. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_3 / p'(0) = 0 \wedge p(1) - 2p(0) = 0 \right\} \subset \mathcal{P}_3$$

Demostrar que $S$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Hallar una base $B$ de $S$ e indicar la dimensión de $S$.

<u>Solución</u>.–

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(0) & = & c \\ p(1) - 2p(0) & = & a + b + d - 2d \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a + b - d & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ d & = & a + b \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} S &= \left\{ ax^3 + bx^2 + (a+b) / a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a(x^3+1) + b(x^2+1) / a, b \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \mathcal{L}\left( \left\{ p_1(x) = x^3 + 1, p_2(x) = x^2 + 1 \right\} \right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \boxed{S \text{ s.v. de } \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \\ \bullet \ B = \{p_1(x), p_2(x)\} \ \text{ s.g. de } S \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1(x) \neq \alpha p_2(x) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad B \text{ s. libre} \\ B = \{p_1(x), p_2(x)\} \ \text{ s.g. de } S \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{B \text{ base de } S \wedge \dim S = 2}$$

2. Consideremos el subespacio vectorial $S$ de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left( \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Hallar un sistema generador $G$ de $S$ que no sea base de $S$. Justificar la respuesta.

Hallar un sistema libre $F$ de $S$ que no sea sistema generador de $S$. Justificar la respuesta.

<u>Solución</u>.–

Sea $A$ la matriz cuyas filas son los vectores (matrices) del sistema generador $G$ de $S$ que nos proporciona el enunciado. Se tiene entonces que:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(G) = \dim \mathcal{L}(G) = \dim S$$

Para calcular el rango de $A$ utilizaremos operaciones elementales de fila:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle F_2-F_1} \\ {\scriptstyle F_3-2F_1} \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle -\frac{1}{2}F_2} \\ {\scriptstyle -\frac{1}{3}F_3} \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el comentario realizado previamente, se tiene que: $\dim S = 2$. Por lo tanto un sistema generador de $S$ que no es base de $S$ puede ser:

$$\boxed{G = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

pues se trata de un sistema generador de $S$ y no puede ser base de $S$ pues contiene 3 vectores y todas las bases de $S$ han de contener dos vectores.

Un sistema libre de $S$ que no sea base de $S$ puede ser:

$$\boxed{\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right\}}$$

Se trata de un sistema libre de $S$ pues es un conjunto formado por un único vector (matriz) no nulo de $S$ y no puede ser sistema generador de $S$ pues contiene un único vector y todos los sistemas generadores de $S$ han de contener al menos dos vectores.

3. Sea

$$B = \{ p_1(x) = -x^3 + 2x^2 + 1, p_2(x) = -x^3 + 2x^2, p_3(x) = x^4 + x^2 + x - 2 \}$$

una base de cierto subespacio vectorial $S$ de $\mathcal{P}_4$. Prolongar $B$ hasta conseguir una base $B^*$ de $\mathcal{P}_4$. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.–

Sea $A^*$ la matriz cuyas filas son los vectores (polinomios) del conjunto $B^*$, siendo

$$\boxed{B^* = \{ \overline{p}_1(x) = -x^3 + 2x^2 + 1, p_2(x) = -x^3 + 2x^2, p_3(x) = x^4 + x^2 + x - 2, e_1(x), e_2(x) \}},$$

siendo

$$e_1(x) = x^4 \qquad ; \qquad e_2(x) = x^3$$

Sabemos que entonces se cumple que $\mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*)$.

Para calcular el rango de la matriz $A^*$ vamos a comprobar que su determinante es no nulo. Desarrollando por las filas que hemos añadido:

$$\det A^* = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \det A^* \neq 0 \implies \mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*) = 5 = \mathrm{card}\, B^* \implies B^* \text{ s. libre} \\ \dim \mathcal{P}_4 = 5 = \mathrm{card}\, B^* \end{array}\right\} \implies B^* \text{ base de } \mathcal{P}_4$$

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\begin{gathered} \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_3y_4 - x_4y_3 \\ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \end{gathered}$$

Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial $S$ de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,1,1,0), \overline{u}_2 = (1,0,0,0), \overline{u}_3 = (1,1,0,0)\}\right)$$

*Solución*.– Comprobaremos en primer lugar que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ forman un sistema libre. Para ello escribiremos la matriz $A$ cuyas filas son los vectores $\overline{u}_i$. Como se ha mencionado previamente se cumple que:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\ \left(\{\overline{u}_1 = (1,1,1,0), \overline{u}_2 = (1,0,0,0), \overline{u}_3 = (1,1,0,0)\}\right)$$

de modo que si $\mathrm{r}\,(A) = 3$ entonces los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ forman un sistema libre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \implies \quad \mathrm{r}\,(A) = 3$$

Aplicamos el proceso de Gram–Schmidt:

- $\overline{v}_1 \;=\; \overline{u}_1 = \underline{(1,1,1,0) = \overline{v}_1}$

- $\overline{v}_2 \;=\; \overline{u}_2 - \dfrac{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 \overset{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle = 2\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2 = 4}{\overset{\downarrow}{=}} \overline{u}_2 - \dfrac{1}{2}\overline{u}_1 = \underline{\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right) = \overline{v}_2}$

- $\overline{v}_3 \;=\; \overline{u}_3 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 \overset{\substack{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle = 3\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2 = 4 \\ \langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle = \frac{1}{2}\ ;\ \|\overline{v}_2\|^2 = 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \overline{u}_3 - \dfrac{3}{4}\overline{v}_1 - \dfrac{1}{2}\overline{v}_2 =$
  $\;=\; \underline{\left(0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right) = \overline{v}_3}$

Normalizamos los vectores $\overline{v}_i$:

- $\overline{w}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} \overset{\|\overline{v}_1\|^2 = 4}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right) = \overline{w}_1}$

- $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} \overset{\|\overline{v}_2\|^2 = 1}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right) = \overline{w}_2}$

- $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} \overset{\|\overline{v}_3\|^2 = \frac{1}{2}}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \overline{w}_3}$

Una base ortonormal $B_{ON}$ de $S$ será la formada por los vectores $\overline{w}_i$. es decir:

$$\boxed{B_{ON} = \left\{ \overline{w}_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \overline{w}_2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \overline{w}_3 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}}$$

# BLOQUE 2

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^T \cdot A) \quad \text{con } A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

(donde tr significa la traza de una matriz cuadrada, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) consideremos cierto subespacio vectorial $S$ del que sabemos que

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal de $S$.

Calcular la mejor aproximación de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $S$. Justificar la respuesta.

*Solución*.– Como $B$ es una base ortogonal de $S$ para hallar la mejor aproximación, que denotaremos $A_q$, de $A$ en $S$ haremos:

$$A_q = \frac{\langle A, A_1 \rangle}{\|A_1\|^2} \cdot A_1 + \frac{\langle A, A_2 \rangle}{\|A_2\|^2} \cdot A_2 + \frac{\langle A, A_3 \rangle}{\|A_3\|^2} \cdot A_3$$

Teniendo en cuenta que:

$$\langle A, A_1 \rangle = 2 \quad ; \quad \langle A, A_2 \rangle = -2 \quad ; \quad \langle A, A_3 \rangle = 1$$

$$\|A:1\|^2 = 4 \quad ; \quad \|A_2\|^2 = 12 \quad ; \quad \|A_3\|^2 = 6$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_q &= \frac{2}{4} \cdot A_1 - \frac{2}{12} \cdot A_2 + \frac{1}{6} \cdot A_3 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_q} \end{aligned}$$

2. Clasificar en función de los parámetros reales $p, q$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + (p+2)x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + (2p+3)x_2 - px_3 &= -1 \\ qx_2 + (p+2)x_3 &= 2q \end{aligned} \right\}$$

*Solución*.– Vamos a realizar operaciones elementales de fila sobre la matriz ampliada $AM$ del sistema para clasificarlo:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & p+2 & 1 & 0 \\ 2 & 2p+3 & -p & -1 \\ 0 & q & p+2 & 2q \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p+2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -p-2 & -1 \\ 0 & q & p+2 & 2q \end{array}\right) \overset{F_3+qF_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p+2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -p-2 & -1 \\ 0 & 0 & (p+2)(1-q) & q \end{array}\right)$$

Luego se tiene:

- $\boxed{p \neq -2 \wedge q \neq 1 \implies \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = 3 = \text{nro. incógnitas} \implies \text{S.C.D.}}$

- $p = -2 \implies \mathrm{r}(A) \leq 2$. En este caso:

  $$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{array}\right) \quad \text{Observando esta matriz resulta evidente que:}$$

  - $\boxed{p = -2 \wedge q \neq 0 \implies \mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}(AM) = 3 \implies \text{S.I.}}$

  - $\boxed{p = -2 \wedge q = 0 \implies \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = 2 < 3 = \text{nro. incógnitas} \implies \text{S.C.I.}}$

- $q = 1 \implies \mathrm{r}(A) \leq 2$. En este caso:

  $$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p+2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -p-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Observando esta matriz resulta evidente que:}$$

- $\boxed{q = 1 \implies \mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}(AM) = 3 \implies \text{S.I.}}$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Escribir este sistema en forma vectorial.

Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

*Solución*.– La expresión vectorial de este sistema es:

$$x \cdot (1,2,1,0) + y \cdot (0,1,3,-2) + z \cdot (0,0,1,2) + t \cdot (-3,-5,8,3) = (-3,-2,20,4)$$

Utilizamos el método de Gauss para la resolución de este sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 8 & 20 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{F_4+2F_2}{\overset{F_3-3F_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \overset{F_4-2F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_4 & = & -3 \\ x_2 + x_4 & = & 4 \\ x_3 + 2x_4 & = & 5 \\ x_4 & = & 2 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & 2 \end{array}}$$

## BLOQUE 3

1. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores propios de $A$ indicando su orden o multiplicidad.

Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz $A$ es una matriz invertible o no.

*Solución*.– Para calcular los valores propios de la matriz $A$ vamos a hallar su polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{des. } F_4}{\overset{\downarrow}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2+F_3}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{\overset{\downarrow}{=}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda+2) \cdot \lambda \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lcl} \lambda_1 = 2 & ; & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 & ; & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 & ; & k_3 = 1 \end{array}}$$

Para deducir que la matriz $\boxed{\text{A no es invertible}}$ utilizando la información anterior podemos proceder de dos formas distintas:

- $\lambda = 0$ es valor propio de $A$, luego por el teorema de la matriz invertible $A$ es regular o invertible.
- $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 2) \cdot \lambda$, luego sustituyendo $\lambda$ por 0, se tiene:

$$\det A \overset{p_A(0)=\det A}{\overset{\downarrow}{=}} 0 \Longrightarrow \quad A \text{ no es invertible}$$

2. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Teniendo en cuenta que el polinomio característico de $A$ es:
$$p_A(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 3)\lambda^2$$
hallar los subespacios propios de $A$ indicando una base de cada uno de ellos.

<u>*Solución*</u>.–

- $V(6) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 6 \cdot \overline{x}\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A - 6I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}}\right\} \overset{*}{=}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{-4} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_2, x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRE}: & x_1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &=& 0 \\ -3x_4 &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcr} -4x_2 + 2x_3 &=& -2a \\ 2x_2 - 4x_3 &=& -2a \\ x_4 &=& 0 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 = x_2 = x_3 &=& a \\ x_4 &=& 0 \end{array}\right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$\overset{*}{=} \{(a, a, a, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 1, 1, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1, 1, 1, 0)\}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Longrightarrow \quad B_1 = \{\overline{u}_1\} \ \text{ s. g. de } V(6) \\ \overline{u}_1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad B_1 \ \text{ s. libre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad B_1 = \{\overline{u}_1\} \ \text{ base de } V(6)$$

- $V(3) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 3 \cdot \overline{x}\} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A - 3I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}} \right\} \stackrel{**}{=}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES :} & x_1, x_2, x_3 \\ \text{INC. LIBRE :} & x_4 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 = x_2 = x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & a \end{array} \right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{**}{=} \{(0,0,0,a)/a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (0,0,0,1)/a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2 = (0,0,0,1)\}\right) \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} \implies \quad B_2 = \{\overline{u}_2\} \text{ s. g. de } V(3) \\ \overline{u}_2 \neq 0 \quad \implies \quad B_2 \text{ s. libre} \end{array}\right\} \implies \quad B_2 = \{\overline{u}_2\} \text{ base de } V(3)$$

- $V(0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 0 \cdot \overline{x}\} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{A \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}} \right\} \stackrel{***}{=}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES :} & x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRES :} & x_1 = a\,,\ x_2 = b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & a \\ x_2 & = & b \\ x_3 & = & -a - b \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{***}{=} \{(a, b, -a-b, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1,0,-1,0) + b \cdot (0,1,-1,0)/a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_3 = (1,0,-1,0), \overline{u}_4 = (0,1,-1,0)\}\right) \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} \implies \quad B_3 = \{\overline{u}_3, \overline{u}_4\} \text{ s. g. de } V(0) \\ \overline{u}_3 \neq \alpha \cdot \overline{u}_4 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \implies \quad B_2 \text{ s. libre} \end{array}\right\} \implies \quad B_3 = \{\overline{u}_3, \overline{u}_4\} \text{ base de } V(0)$$

La solución del ejercicio es:

- $\boxed{\begin{array}{l} V(6) = \{(a,a,a,0)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_1 = \{\overline{u}_1 = (1,1,1,0)\} \text{ base de } V(15) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(3) = \{(0,0,0,a)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_2 = \{\overline{u}_2 = (0,0,0,1)\} \text{ base de } V(1) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(0) = \{(a,b,-a-b,0)/a,b \in \mathbb{R}\} \\ B_3 = \{\overline{u}_3 = (1,0,-1,0), \overline{u}_4 = (0,1,-1,0)\} \text{ base de } V(0) \end{array}}$

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:

$$\sigma = \{-2, 1, 0\}$$

Además se cumple que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $A$ es diagonalizable y diagonalizar $A$.

¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

*Solución*.– Según los datos del ejercicio:

$$\begin{array}{lclcl} \lambda_1 = -2 & ; & k_1 = 1 = d_1 & ; & B_1 = \{(-2,0,1)\} \text{ base de } V(-2) \\ \lambda_2 = 1 & ; & k_2 = 1 = d_2 & ; & B_2 = \{(1,1,0)\} \text{ base de } V(1) \\ \lambda_3 = 0 & ; & k_3 = 1 = d_3 & ; & B_3 = \{(2,1,0)\} \text{ base de } V(0) \end{array}$$

Por lo tanto la matriz $\boxed{\text{A es diagonalizable}}$ ya que se cumple que:

- $k_1 + k_2 + k_3 = 3$
- $k_i = d_i \quad i = 1,2,3$

Se cumplirá además que:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P, \quad \text{siendo } P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Para calcular el determinante de la matriz $A$ utilizando la información anterior podemos proceder de dos formas distintas:

- $\lambda = 0$ es valor propio de $A$, luego por el teorema de la matriz invertible $A$ es singular, es decir, $\boxed{\det A = 0}$.
- $\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 2) \cdot (\lambda - 1) \cdot \lambda$, luego sustituyendo $\lambda$ por 0, se tiene:

$$\boxed{\det A \overset{\overset{p_A(0) = \det A}{\downarrow}}{=} 0}$$

b.– ¿Para qué valores de los parámetros reales $a, b$ es diagonalizable ortogonalmente la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & b-1 \end{pmatrix} ?$$

Justificar la respuesta.

*Solución*.– Una matriz cuadrada real $A$ es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si es una matriz simétrica. Por lo tanto:

$$\boxed{A \text{ diagonalizable ortogonalmente} \quad \Longleftrightarrow \quad a+2=a \quad \Longleftrightarrow \quad a=-1}$$